



Une critique opérationnelle du welfarisme dans la prise de décision publique

Antoinette Baujard

► To cite this version:

Antoinette Baujard. Une critique opérationnelle du welfarisme dans la prise de décision publique. Economie et Prévision, 2006, 175-176 (4-5), pp.51-63. halshs-00155130

HAL Id: halshs-00155130

<https://shs.hal.science/halshs-00155130>

Submitted on 28 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'estimation des préférences individuelles en vue de la décision publique. Problèmes, paradoxes, enjeux

Antoinette Baujard^(*)

À l'heure où la LOFL exige, selon ses promoteurs, plus de démocratie dans la gestion publique et plus d'efficacité des dépenses engagées, où le débat public témoigne de leur nécessité et renforce l'exigence de leur qualité, les outils d'aide et de contrôle de la décision publique fournis par l'économie publique sont au centre de la scène. Ces travaux ne visent pas seulement à fournir des outils d'aide à la décision, ils doivent encore en garantir la qualité, permettre l'évaluation des décisions qui en résultent et contribuer à la transparence de la construction des décisions publiques.

Plutôt que de s'attacher aux fondements théoriques des décisions publiques dans une situation donnée, cet article traite de leur qualité et de leur transparence. Il vise à attirer l'attention sur les enjeux liés à l'acquisition de l'information sur la qualité et sur l'interprétation des décisions publiques. Peut-on garantir au public que la décision prise est conforme à ses attentes ? Sommes-nous certains que l'interprétation affichée par l'auteur de la décision coïncide en tous points avec celle qu'elle véhicule effectivement ? Le contexte opérationnel de collecte d'information affecte-t-il la qualité de la décision ? La formulation de l'objectif de la décision publique est-elle satisfaisante ? Peut-on interpréter précisément cet objectif ? Sur quels fondements cette activité d'interprétation doit-elle reposer ?

Les modèles d'économie publique sont conçus comme des outils d'aide à la décision orientée vers le bien-être des populations concernées. Concrètement, les situations sociales et les solutions sont le plus couramment évaluées au moyen d'une fonction de bien-être social welfariste – bien souvent égale au surplus. Cette fonction de bien-être social est welfariste si elle repose exclusivement sur les utilités individuelles : une décision sociale ne devrait pas être prise si elle est au désavantage des citoyens ; au contraire, elle doit aller dans le sens de l'utilité des individus. Cet article écarte le problème de l'agrégation – bien étudié par les théoriciens du choix social – pour se concentrer sur celui des informations utilisées pour inférer les utilités individuelles. Bien évidemment, si le décideur n'arrive pas à connaître correctement ce que les individus préfèrent, il y a fort à parier que sa décision, même fondée théoriquement, peinera à satisfaire les préférences individuelles. De même, la perspective welfariste, qu'il croyait défendre à travers la prise en compte de l'intérêt des individus, ne constitue alors plus une interprétation fidèle de la décision publique, qui sert finalement des causes qui restent à définir. Les modalités de collecte d'informations sur les utilités individuelles exercent ainsi une influence majeure sur la qualité et la transparence des décisions publiques.

(*) Centre de recherche en économie et en management (Crem), Université de Caen Basse-Normandie.
E-mail : Antoinette.Baujard@unicaen.fr

Cet article a été présenté au congrès de la société "Social Choice and Welfare" à Pasadena en juillet 2002 et aux journées "Aide à la Décision Publique" de l'AFSE à Rennes en mai 2004. L'auteur remercie S. Anderson, S. Geslin, V. Merlin, Ph. Mongin, V. Reboud, R. Renault, D. Saari, M. Salles, Ch. Schmidt ainsi que deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires et suggestions. La position défendue dans cet article et ses défauts ne sont imputables qu'à son auteur.

Cet article illustre et explicite ces problèmes en prenant appui sur un modèle d'aide à la décision publique orienté vers le choix de subvention d'un mode de transport. Les modalités de collecte de données sur les utilités individuelles sont décrites précisément pour permettre d'évaluer leur impact sur la qualité des informations utilisées et, finalement, sur la qualité de la décision. Les contraintes étudiées sont les suivantes : selon la théorie des préférences révélées, les comportements de choix (par exemple entre bus et voiture, ou entre taxi et métro) rendent compte des préférences individuelles ; le décideur ne dispose que de données agrégées sur les choix de la population ; les choix ne sont valables que dans des contextes particuliers. L'adaptation à ce contexte des calculs de paradoxes de vote élaborés par Saari et Sieberg fournit une méthode d'évaluation précise de la perte d'informations liées à ces contraintes.

Les résultats obtenus révèlent certaines difficultés : l'évaluation ne respecte pas nécessairement les vraies préférences des agents. Par exemple, si 56% de la population préfère la voiture au bus et 52% le taxi au métro, on n'a que 4,55% de chances pour qu'une majorité de personnes préfère effectivement la voiture et le taxi à la combinaison bus et métro.

Des paradoxes apparaissent également : si l'on dispose d'informations sur plus de trois contextes de choix, la décision est même susceptible d'aller à l'encontre de la majorité des préférences des agents, alors qu'elle respecte la majorité des préférences observées. Ainsi, on pourrait justifier de subventionner le transport privé alors que la majorité de la population préfère, au contraire, le transport public.

Ces constats invitent à réviser l'interprétation de l'objectif assigné à la décision publique. A en lire le modèle de départ, l'objectifs'analyse comme welfariste : le décideur souhaite aller dans le sens des préférences individuelles. Le choix de cette modalité d'inférence des utilités et les contraintes rencontrées dans l'opération de collecte éloignent l'objectif atteint de l'objectif annoncé. Une étude attentive de l'interprétation de la décision isole le rôle du choix du modèle d'utilité – ici le modèle fort d'utilité associé à la théorie des préférences révélées – et du welfarisme.

En mettant en évidence des problèmes et des paradoxes et en discutant l'interprétation des décisions publiques pour des contraintes opérationnelles données dans l'estimation des préférences, cet article parvient à trois conclusions.

Tout d'abord, dans l'exemple présenté, les informations recueillies sur les préférences des agents sont très pauvres et, en tout état de cause, insuffisantes pour fonder une évaluation fiable du bien-être individuel. La qualité d'une décision publique fondée sur ce diagnostic est donc discutable. Le recours à la théorie des préférences révélées en économie publique est sujet à caution dans la mesure où la qualité des résultats est particulièrement sensible aux contraintes opérationnelles.

Ensuite, la phase opérationnelle donne un sens particulier aux préférences, donc aux utilités et, partant, aux fins effectivement poursuivies. La décision qui en résulte peut alors entrer en contradiction avec les fins énoncées par le modèle théorique de décision publique. Une deuxième conclusion consiste donc à plaider pour une prise en compte, dès la conception des modèles d'économie publique, de ces contraintes inhérentes à l'étape opérationnelle.

Enfin, la mise en évidence de ces contraintes invite à rechercher des solutions alternatives. Si certaines d'entre elles s'avèrent peu satisfaisantes, l'une d'elles permet d'utiliser des données non-welfaristes pour améliorer la qualité des informations, cela même en retenant des conceptions welfaristes de la justice. Le non-welfarisme technique est ainsi susceptible d'offrir un support utile au welfarisme philosophique.

Les décisions publiques devraient viser à améliorer la qualité de la vie des membres de la société, par exemple en organisant la régulation des nuisances ou en finançant des infrastructures publiques. En d'autres termes, elles ont vocation à maximiser le bien-être social. Une question importante en économie publique est donc de savoir comment décider, en s'interrogeant sur les informations à recueillir et les fins à poursuivre. Le plus souvent, conformément au cadre welfariste de l'économie du bien-être, le bien-être social est évalué comme une fonction des bien-être individuels, représentés par des fonctions d'utilité individuelle. Il faut donc, dans un premier temps, déterminer ces fonctions d'utilité individuelle qui sont, dans un second temps, agrégées. La phase d'agrégation rend compte de choix normatifs importants : le choix des comparaisons interpersonnelles reflète les aspirations redistributives du décideur. Cette seconde phase de la mesure du bien-être social n'est pas étudiée dans cet article. Nous nous concentrons sur la première phase du processus de décision, qui consiste à déterminer les fonctions d'utilité individuelle pertinentes. Nous étudions combien le choix des modalités de détermination du bien-être individuel ainsi que les contraintes opérationnelles qui pèsent sur la collecte de ces données ont un impact, d'une part, sur la qualité de la décision publique finale et, d'autre part, sur le sens conféré au bien-être social. Ainsi, la phase de collecte des données présente des enjeux remarquables, relatifs à la qualité et à l'interprétation des décisions publiques qui en résultent.

Les enjeux associés à l'inférence des préférences individuelles sont ici illustrés par un modèle simple. Un décideur doit sélectionner un mode de transport à subventionner. Il lui faut donc choisir entre différents modes de transport. Or, les données disponibles pour identifier quelle option ou quel ensemble d'options contribue le plus au bien-être public sont limitées. D'une part, il n'est pas trivial de déterminer les fonctions d'utilité individuelle pertinentes pour un problème donné. L'observation des comportements peut apparaître comme une approximation satisfaisante des utilités. Le recours à la théorie des préférences révélées est en effet relativement courant pour l'évaluation publique⁽¹⁾. D'autre part, le décideur public ne peut pas disposer d'informations précises sur les préférences individuelles mais il connaît les proportions d'agents qui préfèrent une option à une autre. En outre, il observe les préférences définies sur des parties de la situation sociale, c'est-à-dire sur des contextes particuliers, et non sur sa totalité. Là encore, il doit s'en contenter, faute d'accéder à d'autres informations. Nous cherchons à étudier dans quelle mesure ces deux types de restriction de l'information affectent la qualité et l'interprétation de la décision publique. Nous illustrons en particulier la difficulté d'estimer les préférences de la population à partir de données partielles sur les choix.

La méthode utilisée pour étudier la qualité de la décision repose sur les résultats de la littérature sur les paradoxes de vote⁽²⁾. Selon le paradoxe d'Anscombe, une majorité d'électeurs peuvent être une minorité sur une majorité de questions sur lesquelles ils sont consultés. Selon le paradoxe d'Ostrogorski, une majorité d'individus peuvent voter pour un parti, alors même qu'ils ne voteraient pas pour la majorité des mesures qu'il défend. Les paradoxes qui apparaissent entre les résultats d'une élection de candidats et ceux d'un vote par mesure défendue par ces mêmes candidats ont été étudiés par Saari et Sieberg (2001). Ils développent une approche géométrique⁽³⁾ pour identifier tous les profils de préférences individuelles qui soutiennent chaque question posée et tous les profils qui soutiennent une combinaison de ces questions. Ils mettent alors en relief la perte importante d'information subie du fait de l'observation partielle des préférences. Nous appliquons ici cette technique à un autre domaine⁽⁴⁾ : l'étude de la fiabilité des informations utilisées dans l'aide à la décision publique. De légères modifications des résultats de Saari et Sieberg s'imposeront toutefois pour les adapter au contexte considéré. Par ailleurs, notre méthode d'argumentation relative à l'interprétation de la décision consiste à étudier les différentes composantes de la fonction de bien-être social.

Nous présentons le modèle dans la première partie. Nous analysons les conséquences des limites à l'accès aux données sur la fiabilité des informations sur les utilités dans la deuxième partie. Nous présentons les éléments d'interprétation de la décision finale dans la troisième partie. L'article débouche, dans la dernière partie, sur trois types de conclusions relatives aux contraintes opérationnelles du welfarisme dans la prise de décision publique. Enfin, les annexes comprennent deux démonstrations possibles pour nos propositions.

Présentation du modèle

Le modèle étudié est le suivant. Un décideur public cherche à maximiser le bien-être public en déterminant le bon type de transport à subventionner : soit le transport public – bus ou métro, notés respectivement *B* et *S* –, soit le transport privé – taxis ou voitures, notés respectivement *T* et *C*. Le concept de bien-être social utilisé est welfariste, ce qui signifie que seule l'information concernant les utilités individuelles est pertinente pour orienter la décision publique. Nous nous concentrons sur la phase de collecte des données nécessaires pour encoder les utilités individuelles. Subissant des contraintes opérationnelles qu'il est raisonnable de considérer, le décideur fait alors face à une triple restriction de l'information. Tout d'abord, il utilise

des informations comportementales pour en inférer les préférences individuelles, sachant que l'utilité individuelle revient strictement à la satisfaction de ces préférences. Il peut observer le mode de transport choisi par la population et en déduire une approximation satisfaisante des modes de transports susceptibles de maximiser le bien-être social. Ensuite, il ne peut pas observer les comportements de choix individuels mais seulement les comportements agrégés de la population dans différentes situations. Il peut alors observer ce que préfèrent des parties de la population, mais pas identifier qui préfère quoi. Enfin, il ne dispose pas d'informations concernant les relations de préférences des individus entre les options sur l'ensemble universel des choix dans sa totalité. En revanche, il peut connaître les préférences sur les parties de l'ensemble universel, c'est-à-dire sur des contextes de choix particuliers.

Dans le modèle étudié, le contexte de choix entre le bus et les voitures se distingue de celui dans lequel les individus peuvent choisir entre le métro et les taxis. Le décideur cherche à déterminer le profil universel des préférences individuelles, c'est-à-dire la liste de toutes les préférences individuelles entre options sur l'ensemble universel des options. *Ce profil universel des préférences individuelles constitue l'information pertinente pour sa décision. Il ne dispose toutefois que des profils agrégés par contextes de choix.* Sous ces hypothèses, les informations disponibles sont les relations de préférences entre différents contextes de choix, alors que le décideur souhaiterait connaître les relations de préférences sur des ensembles de certaines options, au mieux, sur l'ensemble universel des options. Dans la théorie des préférences révélées, l'axiome faible des préférences révélées permet de conserver la même relation de préférence entre les options lorsque l'ensemble d'opportunités change. Mais cette condition d'indépendance, souvent difficile à justifier au niveau individuel⁽⁵⁾, est, pour des raisons évidentes, plus difficile encore à défendre dans le cas de données agrégées⁽⁶⁾. Il s'agit d'étudier les conséquences de ces limites de l'information disponible.

Nous introduisons les notations suivantes. Soit X l'ensemble universel des options. C'est le contexte de choix de la relation de préférence pertinente. On a : $X = \{C, B, T, S\}$. Ici, X comprend deux types de transport public, le métro S et le bus B , et deux types de transport privé, les voitures C et les taxis T .

Les choix observés sont toujours réalisés dans des contextes de choix spécifiques, c'est-à-dire dans des ensembles particuliers d'options, plutôt que dans l'ensemble de toutes les options possibles. Le premier contexte de choix est noté $F_1 = \{C, B\}$ et le second $F_2 = \{T, S\}$ ⁽⁷⁾. Les choix, dans un contexte donné, sont représentés par une relation binaire \succ_1 pour le contexte F_1 et \succ_2 pour le contexte F_2 . La

relation de préférence $\succ_{i, i=1,2}$ est un ordre strict, c'est-à-dire une relation transitive, complète et asymétrique⁽⁸⁾. La relation de préférence pertinente, fondée sur la représentation des choix dans l'ensemble universel des options s'écrit : \succ . C'est celle que le décideur public cherche à inférer pour chaque individu. Mais cette information par individu serait très lourde à obtenir et à traiter ; aussi se satisfait-il de l'information concernant l'ensemble des individus, traduite par l'étude des profils de préférence.

Un profil est ici défini comme la liste des proportions d'individus ayant chacune des relations de préférence possibles. Un profil pour un contexte de choix particulier, par exemple le premier, est donc représenté par $(m_1, 1-m_1)$, où une fraction m_1 de la population apprécie plus la voiture que le bus, c'est-à-dire l'option C plus que B , et une fraction $1-m_1$ préfère B à C lorsqu'ils sont dans le contexte F_1 . On peut de la même manière établir le profil pour le second contexte, où une fraction m_2 de la population préfère le taxi au métro : $T \succ_2 S$ et une fraction $1-m_2$ de la population a la préférence inverse : $S \succ_2 T$. On peut résumer ces observations par le point suivant : (m_1, m_2) . On définit à présent le profil pertinent comme la liste des proportions d'individus ayant chaque relation de préférence possible. Soit $v(C \succ B, T \succ S)$ la proportion des personnes qui préfèrent à la fois les voitures aux bus et les taxis au métro. Si $v(.,.)$ exprime la proportion de personnes ayant la préférence correspondante, le profil universel des préférences lorsque l'on peut seulement choisir entre les options des contextes particuliers s'écrit :

$$(v(C \succ B, T \succ S), v(C \succ B, S \succ T), v(B \succ C, T \succ S), v(B \succ C, S \succ T)).$$

La qualité de la décision : problèmes et paradoxes

Nous évaluons maintenant la perte d'information induite par les deux conditions suivantes : 1) les données observées sont agrégées ; 2) le choix observé est limité à un contexte particulier. Pour réaliser les calculs nécessaires, nous posons certaines hypothèses sur la distribution des préférences dans la société : les profils sont supposés équiprobables. À partir de cette hypothèse, on peut désormais calculer la probabilité qu'une fraction de la population au moins aussi grande que α ait une certaine préférence, par exemple la préférence $(C \succ B, T \succ S)$. Nous calculerons donc $Prob [v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha]$. En outre, nous pouvons calculer la probabilité qu'une fraction au moins égale à β de la population ait la relation de préférence inverse $(B \succ C, S \succ T)$.

Théorème 1. Saari et Sieberg (2001). *Pour deux paires, supposons que les deux candidats élus remportent les élections avec la majorité des votes, $m_j > 1/2$, $j=1,2$, avec $m_1 \geq m_2$. Supposons que tous les profils sont équiprobables. La probabilité qu'au moins une fraction α de tous les électeurs préfère les résultats des deux élections est :*

$$(1) \text{ Prob}(\alpha) = \max\left(\frac{m_2 - \alpha}{1 - m_1}, 0\right)$$

De la même manière, la probabilité qu'une proportion des électeurs au moins égale à β ait souhaité des résultats inverses pour les deux élections est :

$$(2) \text{ Prob}(\beta) = \max\left(\frac{1 - m_1 - \beta}{1 - m_1}, 0\right)$$

Exemple 1. Si l'on a $m_1=56\%$ et $m_2=52\%$, $\text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq 50\%] = (0,52 - 0,50) / (1 - 0,56)$. Cela signifie que, si nous observons que 56% des personnes de la population utilisent leur voiture quand elles peuvent prendre le bus et que 52% prennent le taxi alors qu'elles peuvent utiliser le métro, alors nous ne pouvons guère dire plus que la chose suivante : il y a 4,55% de chance pour qu'une majorité de personnes préfère, effectivement, le transport public au transport privé. Ce qui ressemble à un renversement de préférence est, ici, l'illustration des conséquences de combinaisons probables de préférences individuelles cohérentes avec les observations. L'information effectivement recueillie est très faible au regard des ambitions des modèles d'économie publique.

À partir des données observées, nous pouvons être sûrs que : $\text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] = 100\%$ si $(0,52 - \alpha) / (1 - 0,56) = 100\%$, donc pour $\alpha = 8\%$. Cela signifie que nous sommes seulement sûrs que 8% de la population préfère effectivement les transports privés au transport public.

Mais que se passe-t-il si 54% des gens préfèrent la voiture au bus (pour des raisons de rapidité) et que 48% des gens préfèrent le métro au taxi (par crainte des encombrements routiers) ? Le résultat précédent ne permet pas d'envisager directement cette situation.

Pour ces différents cas, dont l'analyse est utile pour le type de problème que nous envisageons, nous obtenons les résultats suivants :

Proposition 1. *Pour des profils équiprobables, la probabilité qu'une fraction de la population au moins égale à α apprécie à la fois les deux options retenues, si nous observons que les fractions (m_1, m_2) de la population les préfèrent à leur alternative correspondante.*

Pour $1 + \alpha > m_1 + m_2$ est :

1. Pour $m_2 < m_1$,

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 < 1 - m_2, \text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] \\ & = \max(0, (m_2 - \alpha) / m_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 < 1 - m_2, \text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] \\ & = \max(0, (m_2 - \alpha) / (1 - m_2)) \end{aligned}$$

2. Pour $m_1 < m_2$

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 < 1 - m_2, \text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] \\ & = \max(0, (m_1 - \alpha) / m_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 > 1 - m_2, \text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] \\ & = \max(0, (m_1 - \alpha) / (1 - m_1)) \end{aligned}$$

Pour $1 + \alpha < m_1 + m_2$, nous aurons :

1. Pour $m_2 < m_1$

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 < 1 - m_2, \text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] \\ & = \max(0, (1 - m_1) / m_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 < 1 - m_2, \text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] \\ & = \max(0, (1 - m_1) / m_1) \end{aligned}$$

2. Pour $m_1 < m_2$

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 < 1 - m_2, \text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] \\ & = \max(0, (1 - m_2) / m_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 < 1 - m_2, \text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] \\ & = \max(0, (1 - m_2) / (1 - m_1)) \end{aligned}$$

Proposition 2. *Pour des profils équiprobables, la probabilité qu'une proportion de la population au moins égale à β n'apprécie aucune des options retenues, si l'on observe que les fractions (m_1, m_2) de la population les préfèrent à leur alternative respective est :*

1. Pour $m_2 < m_1$,

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 > 1 - m_2 - \beta, \text{Prob}[v(B \succ C, S \succ T) \geq \beta] \\ & = \max(0, (1 - m_2 - \beta) / (1 - m_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \text{si } m_1 < 1 - m_2 - \beta, \text{Prob}[v(B \succ C, S \succ T) \geq \beta] \\ & = \max(0, (1 - m_1 - m_2) / (1 - m_2)) \end{aligned}$$

2. Pour $m_1 < m_2$,

$$- \text{ si } m_1 > 1 - m_2 - \beta, \text{ Prob}[v(B \succ C, S \succ T) \geq \beta] \\ = \max(0, (1 - m_1 - \beta) / (1 - m_1))$$

$$- \text{ si } m_1 < 1 - m_2 - \beta, \text{ Prob}[v(B \succ C, S \succ T) \geq \beta] \\ = \max(0, (1 - m_1 - m_2) / (1 - m_1))$$

Exemple 2. Si $m_1 = 54\%$ et $m_2 = 48\%$, nous sommes dans le cas suivant : $m_1 > m_2$ et $m_1 > 1 - m_2$.

Soit $\alpha + 1 < m_1 + m_2$, nous avons donc $\text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] = 88,46\%$ pour tout $\alpha < 2\%$. Soit nous avons, pour tout $\alpha > 2\%$, $\text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq \alpha] = \max(0, (0,48 - \alpha) / 0,52)$. Par exemple, $\text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq 50\%] = 0$ et $\text{Prob}[v(C \succ B, T \succ S) \geq 47\%] = 1,9\%$.

Par ailleurs, la probabilité que plus qu'une proportion β de la population n'apprécie aucun des résultats C et T , pour $\beta = 50\%$ égale à $3,84\%$ et pour $\beta = 40\%$ égale à $23,07\%$.

Ces résultats illustrent les problèmes que rencontrent les décideurs publics. La décision publique devrait satisfaire les préférences des agents. Or, dans des conditions raisonnables d'observation, les données disponibles sur ces préférences, même si elles étaient fiables, ne fournissent pas toute l'information pertinente et nécessaire pour prendre une décision de qualité.

Remarque 1. Si les profils ne sont plus équiprobables et suivent, par exemple, une distribution normale centrée, on peut montrer que le résultat problématique ci-dessus se renforce encore. Dans ce cas, une grande partie des situations probables sont caractérisées par des proportions de préférence pour une option contre l'autre proches de 50% , région où, précisément, les risques de paradoxes sont les plus importants.

Remarque 2. Plus le nombre de contextes de choix est important, plus la perte d'information pose problème. Conformément au paradoxe d'Ostrogorski, on arrive même au résultat paradoxal suivant : une majorité de citoyens semble préférer le transport privé au transport public, si l'on en croit les informations recueillies sur des contextes partiels, alors qu'il est possible qu'une majorité de citoyens préfèrent de fait les transports publics. Imaginons qu'il existe un troisième contexte de choix observable : le choix entre l'usage de la motocyclette (M), transport privé, et celui du vélo de ville (V), transport public. Le paradoxe peut être illustré en décrivant de façon exhaustive les préférences d'un nombre limité d'agents dans chacun des trois contextes : $\{C, B\}, \{T, M\}, \{M, V\}$. On inscrit dans le tableau l'option choisie par chaque agent dans chacun des trois contextes. Cela permet d'observer,

d'une part, la majorité par contexte et, d'autre part, chaque préférence individuelle sur l'ensemble universel des options. On peut en déduire la décision majoritaire qui serait prise en tenant compte d'informations relatives aux contextes partiels et celle qui serait prise en considérant chaque préférence universelle individuelle.

Contextes de choix	$\{C, B\}$	$\{T, S\}$	$\{M, V\}$	Préférences individuelles
Agent 1	C	S	V	public
Agent 2	B	T	V	privé
Agent 3	B	S	M	public
Agent 4	C	T	M	public
Agent 5	C	T	M	public
Majorité par contexte	C Privé	T Privé	M Privé	Privé \ public

Pour un tel profil de préférences, la majorité des agents préfère chacune des options C , T et M à leur alternative. Une décision majoritaire visant à maximiser leur bien-être serait donc de favoriser les transports privés au détriment des transports publics. Pourtant, la majorité des agents (en fait tous sauf un sur les cinq) préfère les transports publics (de la combinaison BSV) aux transports privés (de la combinaison CTM). Ce paradoxe est extrêmement perturbant puisqu'il illustre clairement le fait qu'une décision prise en vue de satisfaire la majorité des agents peut aller précisément à l'encontre de leurs préférences.

L'interprétation de la décision : impact des contraintes opérationnelles

Nous étudions maintenant la façon dont les contraintes opérationnelles qui pèsent sur la phase d'encodage des utilités affectent finalement l'interprétation de la décision. Nous devons pour cela étudier en parallèle les différentes interprétations possibles de ces utilités et du bien-être social et les différentes modalités d'encodage.

“Interpréter” la décision revient à préciser les buts qu'elle poursuit effectivement. De même qu'une décision publique vise des fins qui méritent d'être explicitées, le décideur doit identifier les fins à poursuivre pour sélectionner ses outils de décision. Depuis le résultat d'Arrow, chacun sait qu'un modèle économique qui souhaiterait l'éviter pour rester neutre ne parviendrait à aucune décision. Toute décision publique a donc nécessairement donné lieu à des jugements de valeur qu'il s'impose d'explicitier. Or il est insuffisant de dire que l'objectif est d’“améliorer la qualité de la vie des citoyens”, ou encore de “maximiser leur bien-être”. Une décision

qui vise à égaliser les revenus n'est pas équivalente à celle qui vise à égaliser les chances, pour la seule raison qu'elles sont toutes deux conçues pour maximiser le bien-être de la population. Les situations jugées satisfaisantes, les mesures pour y parvenir et les outils pour évaluer les situations sont bien distincts dans les deux cas.

Une façon standard de distinguer les contenus normatifs de différentes fonctions de bien-être social est de s'intéresser aux modalités d'agrégation. Les utilitaristes contemporains, par exemple, favorisent le critère de somme.

Mais la détermination du mode d'agrégation n'épuise pas l'interprétation normative de la fonction de bien-être social. De même qu'être "égalitariste" ne définit pas la position éthique d'un décideur tant qu'il n'a pas précisé "égalitariste de quoi"⁽⁹⁾, la fonction de bien-être social n'est vraiment analysée que lorsque ses arguments sont définis précisément. Quels types d'informations peuvent-être utilisés ? Une évaluation du bien-être social est welfariste si elle repose uniquement sur des informations portant sur les utilités individuelles et sur aucun autre élément. Sur le plan philosophique, les utilités individuelles sont considérées comme les seules informations éthiquement pertinentes pour émettre un jugement sur le bien-être social. Sur le plan technique, une fonction de bien-être social est welfariste si elle est une fonction des seules fonctions d'utilités individuelles, donc d'un seul type d'information. Elle doit, pour cela, respecter la condition minimale de la Pareto-indifférence⁽¹⁰⁾. Par opposition, une évaluation de bien-être social est non-welfariste si elle ne repose pas seulement sur des informations relatives aux utilités individuelles. Sur le plan philosophique, les droits, les handicaps, les talents ou les caractéristiques du lieu géographique, par exemple, constituent alors des informations pertinentes en elles-mêmes pour l'évaluation du bien-être social, indépendamment de leur contribution aux utilités des individus. Sur le plan technique, les fonctions de bien-être social sont des fonctions de différentes dimensions hétérogènes, dont peuvent faire partie les fonctions d'utilité individuelle, mais aussi la description du respect de droits... Les conceptions de la justice retenues par ces deux courants s'opposent fondamentalement. Les *post-welfaristes*⁽¹¹⁾ critiquent leurs adversaires parce que ces derniers considèrent l'utilité comme seule information pertinente, au risque de violer les droits fondamentaux et au détriment de valeurs telles que la liberté individuelle⁽¹²⁾. Les welfaristes reprochent au nouveau courant son paternalisme et le risque de dérives anti-démocratiques. La différence opérationnelle entre welfarisme et non-welfarisme tient dans l'opposition entre des mesures unidimensionnelles et multidimensionnelles du bien-être. Concrètement, si la source est unique, la fonction unidimensionnelle, on parlera de welfarisme. Tenté de confondre les définitions

technique et philosophique du welfarisme, on pourrait dire que la décision publique devrait être interprétée différemment selon que la fonction de bien-être social est welfariste ou non⁽¹³⁾. Dans le modèle étudié, l'information disponible pour la fonction de bien-être social à la base de la décision se limitant aux préférences individuelles qui représentent les comportements, on parlerait de welfarisme – sans autre précision.

Au sein même du welfarisme, l'unité n'est pas non plus de mise. La conception défendue prend un sens différent selon l'acception retenue de l'utilité⁽¹⁴⁾ – ou, au moins sur le plan technique, selon l'information unidimensionnelle considérée. Ainsi, la notion de juste, définie par la fonction de bien-être social welfariste, ne dépend pas seulement de la phase d'agrégation ; elle dépend également étroitement de la conception retenue de l'utilité individuelle par le décideur. Il existe différents modèles d'utilité à la base de leur interprétation, de même qu'il existe différentes méthodes d'encodage des utilités. Ce que l'on souhaite montrer ici est qu'il existe un lien de fait entre les interprétations normatives et les modalités concrètes d'encodage des utilités. Les philosophes politiques distinguent deux modèles d'utilité⁽¹⁵⁾. Les économistes ont peu recours au modèle d'expérience, selon lequel les utilités reflètent rigoureusement le plaisir subjectif et effectivement vécu. Ils privilégient le modèle des préférences : certains auteurs, tels que Hicks, considèrent, en effet, que l'utilité n'est ni plus ni moins que la représentation numérique des préférences⁽¹⁶⁾. Il faut alors encore définir le type de préférences susceptibles d'être retenues dans les modèles d'économie publique. Selon le modèle faible des préférences, privilégié par les utilitaristes contemporains, l'utilité désigne la satisfaction des préférences informées, rationnelles et fondées sur des croyances vraies. Ces préférences ne peuvent pas être observées, elles doivent être construites rationnellement ou obtenues par "nettoyage" des choix observés. C'est sans doute pour cette raison que les économistes appliqués ont plus souvent recours au modèle fort des préférences : les préférences des individus sont révélées dans les choix effectifs des individus. Cela revient à recourir à la théorie des préférences révélées pour encoder les fonctions d'utilité. Dans l'exemple étudié, les préférences représentent donc les comportements. Le modèle d'utilité effectivement utilisé n'est donc pas le modèle faible des préférences, quand bien même le décideur serait convaincu par ailleurs de sa supériorité théorique. Utiliser le modèle fort des préférences en dépit de cette conviction revient à l'épouser complètement. Si, par la suite, les données obtenues sont agrégées dans la fonction de bien-être social et effectivement utilisées pour la décision, les préférences révélées ont de fait été considérées comme la seule information pertinente pour améliorer le bien-être social. Dans ce modèle, elles sont considérées comme l'utilité individuelle dans

un cadre welfariste. Dès lors, le comportement permet de connaître les préférences et, simultanément, les utilités. Cela signifie que le décideur assume les différentes implications normatives et opérationnelles du welfarisme et du recours au modèle fort des préférences. Ce dernier est souvent critiqué, en particulier parce qu'il repose sur l'hypothèse contestable selon laquelle les agents choisissent toujours ce qui est bon pour eux, en toute indépendance, dans le cadre de contraintes légitimes et sans se tromper. Cela constitue une critique théorique standard. Nous y ajoutons ici une critique de nature opérationnelle. L'étude d'un modèle particulier nous a permis de constater que les critiques qui devaient s'adresser au cadre welfariste de la décision publique reposant sur le modèle fort des préférences devaient également considérer les caractéristiques concrètes de la phase d'observation des comportements. Les obstacles que rencontre le décideur dans cette phase d'observation réduisent l'information pertinente. La qualité du résultat s'en trouve mécaniquement diminuée.

Ces difficultés invitent à emprunter des voies alternatives. Deux autres manières d'inférer les préférences sont alors envisageables. D'un côté, les préférences subjectives, révélées par questionnaire et/ou dans le cadre de procédures expérimentales, permettent d'évaluer l'utilité ressentie par les individus⁽¹⁷⁾, plus conformément au modèle d'expérience et par opposition à la perception qu'en a l'économiste observateur. Mais elles présentent un inconvénient : il est délicat de donner un sens à leurs comparaisons interpersonnelles. L'agrégation des utilités individuelles, lors de la seconde étape du calcul du bien-être social, est donc problématique. Si elles permettent d'éviter le problème soulevé dans cet article, elles en créent un autre qui sera difficile à surmonter dans la seconde phase de la décision, celle de l'évaluation du bien-être social. D'un autre côté, si l'unidimensionnalité des fonctions d'utilité s'avère largement inopérante, il est possible de compléter l'observation des choix par l'observation de différentes caractéristiques objectives. En d'autres termes, l'intégration d'informations non-welfaristes constitue une façon d'éviter le problème soulevé plus haut. En économétrie, l'usage d'informations non-welfaristes, telles que le sexe, l'âge, la profession, semble courant⁽¹⁸⁾. Cette piste conduit à une conclusion originale. Imaginons un décideur public qui, suivant les valeurs défendues par les représentants politiques au pouvoir, vise un objectif welfariste – au sens philosophique plutôt que technique – et accepte le modèle fort des préférences. Le recours à des informations non-welfaristes dans l'évaluation du bien-être social permet d'améliorer la qualité de ses décisions. Ainsi, pour des décisions plus fidèles à l'objectif normatif visé, le non-welfarisme technique vient au service du welfarisme philosophique⁽¹⁹⁾. Mais alors, pour répondre aux objections liées aux dérives paternalistes et anti-démocratiques adressées au

non-welfarisme, une discussion sur la sélection des informations non-welfaristes s'impose dès l'étape de construction des modèles théoriques d'aide à la décision publique. Cette règle de prudence conduit à prendre en compte, en amont -c'est-à-dire au moment de la conception des modèles d'économie publique et non plus seulement lors de la phase d'application- les choix opérationnels d'encodage des utilités.

Conclusions

Cet article vise à attirer l'attention sur l'impact du problème d'acquisition de l'information sur la qualité et sur l'interprétation des décisions publiques.

Dans l'exemple présenté, les informations recueillies sur les préférences des agents sont très pauvres et, en tout état de cause, insuffisantes pour fonder une évaluation fiable du bien-être individuel. La qualité de la décision publique qui repose sur ce diagnostic est donc discutable. Ces conclusions sont valables dans le cadre de l'observation de préférences agrégées et révélées dans des contextes partiels de choix. L'évaluation ne respecte les vraies préférences des agents que dans un nombre limité de cas. Si l'on dispose d'informations sur plus de trois contextes de choix, la décision est même susceptible d'aller à l'encontre de la majorité des préférences des agents, alors qu'elle paraît la respecter si elle repose sur les préférences observées. La mise en évidence de ces problèmes et paradoxes permet de formuler une première conclusion. Le recours à la théorie des préférences révélées en économie publique est contestable sur le plan opérationnel puisque la qualité des résultats s'avère particulièrement sensible aux contraintes opérationnelles.

L'étude de l'interprétation des décisions publiques pour des contraintes opérationnelles données dans l'estimation des préférences permet de tirer deux enseignements. Tout d'abord, la phase opérationnelle donne un sens particulier aux préférences, donc aux utilités et donc aux fins effectivement poursuivies. La décision qui en résulte peut entrer en contradiction avec les fins énoncées par le modèle théorique de décision publique qui n'aurait pas pris en compte cette étape opérationnelle. Une deuxième conclusion conduit donc à plaider pour une prise en compte, dès l'étape théorique de conception des modèles d'économie publique, des contraintes de l'étape opérationnelle. Ensuite, comme les contraintes opérationnelles qui pèsent sur cette modalité d'estimation des préférences ont été mis en avant, il est naturel de tenter de lui trouver des alternatives. Si certaines s'avèrent peu satisfaisantes, l'une d'elles conduit,

même pour des conceptions welfaristes de la justice, à utiliser des informations non-welfaristes pour améliorer la qualité des informations. Une troisième conclusion tirée de cet article est donc que le non-welfarisme technique est susceptible d'être mis au service du welfarisme philosophique.

Notes

- (1) Voir par exemple le rapport Boiteux et Baumstark (2001, pp. 40 *sqq.*, 78 *sqq.*, 178 *sqq.*).
- (2) Pour une présentation des paradoxes de vote, voir Nurmi (1999).
- (3) Pour une présentation d'autres approches géométriques de l'analyse des paradoxes de vote, voir Saari (1994, 2001a).
- (4) Pour des applications à d'autres domaines, voir Saari (2001b). Chaque fois, les problèmes peuvent être représentés sous une forme technique équivalente.
- (5) Voir Sen (1993), Baigent et Gaertner (1996), Gaertner et Xu (1999). Selon la condition d'indépendance, si je choisis y et non x dans l'ensemble qui comprend x et y , je ne choisirai jamais x dans un ensemble plus grand. Un exemple permet d'illustrer les difficultés rencontrées avec cette condition. Imaginons que je me serve la deuxième plus grosse part de gâteau, notée y , plutôt que la plus grosse part, notée x . Je devrais alors choisir la même part y dans un autre gâteau, comprenant au moins les parts y , x , z , où z est une part encore plus grosse. Pourtant, je préfère vraiment la part la plus grosse possible, même si, par convention sociale, je ne choisis jamais la plus grosse mais la seconde plus grosse. Dès lors, je choisirai y dans le premier gâteau et x dans le second. En agissant conformément à ces conventions sociales, j'ai violé l'axiome d'indépendance.
- (6) Avec des données agrégées, on ne dispose que d'informations sur les profils de préférences. Par exemple, on sait que 50% des agents préfèrent A à B et 50% préfèrent C à D . Même si l'on suppose que la condition d'indépendance est bien vérifiée au niveau individuel, on ne peut pas en déduire simplement la proportion de ceux qui préfèrent à la fois A à B et C à D .
- (7) On a donc : $X = F_1 \cup F_2$
- (8) La relation \succ_i est transitive si et seulement si : $\forall x, y, z \in X, x \succ_i y \text{ et } y \succ_i z \Rightarrow x \succ_i z$. Elle est complète si et seulement si : $\forall x, y \in X, x \succ_i y \text{ ou } y \succ_i x$. Elle est asymétrique pour : $x \succ_i y \Rightarrow \text{non-} y \succ_i x$. La propriété d'asymétrie est posée ici pour des raisons techniques. Elle permet de négliger l'indifférence, ce qui simplifie les calculs.
- (9) Sur ces débats, maintenant standard en économie normative, voir, par exemple, Sen (1979a) et Cohen (1990).
- (10) Pour exprimer l'intuition welfariste suivante : "Si toutes les informations relatives à l'utilité de deux états sociaux sont connues, il est possible de les évaluer sans en savoir plus sur ces états sociaux", la fonction de bien-être social doit respecter, non seulement la condition de Pareto-indifférence, mais aussi une condition de neutralité forte. Sur les définitions philosophique et technique ainsi que sur les conditions caractéristiques du welfarisme, voir Mongin et d'Aspremont (1998).
- (11) Pour une présentation des propositions non-welfaristes, voir, notamment, Pattanaik (1994), Sugden (1993), le numéro spécial de 1990 de la revue *Recherches Économiques de Louvain* et celui de 2004 de la revue *Social Choice and Welfare*.
- (12) Pour une présentation des différentes critiques des évaluations welfaristes du bien-être social, voir Sen (1970a, 1970b, 1979, 1985, 1999).

(13) Mais nous verrons plus bas que la correspondance entre welfarisme technique et welfarisme au sens philosophique est loin d'être triviale.

(14) Voir, par exemple, Sen (1980) ou Mongin et d'Aspremont (1998) sur ce thème.

(15) Voir Haslett (1990).

(16) Voir également Hirshleifer (1976) ou encore Pearce (1986).

(17) Voir, par exemple, Kapteyn (1994), Kahneman *et alii* (1997), Frey et Stutzer (1999). Par ailleurs, l'étude expérimentale de l'utilité subjective permet d'identifier les déterminants de l'utilité. Sur ce point, voir Frey et Stutzer (2001).

(18) L'économètre peut avoir recours à ces covariables – ou variables de conditionnement – dès lors qu'elles ne sont pas corrélées avec le terme d'erreur de l'équation des résultats. En revanche, elles peuvent être corrélées avec la composante de l'incidence propre à l'agent, ce qui permet de refléter l'effet de conditionnement. Sur les hypothèses nécessaires et les modèles cohérents avec l'utilisation de ces variables, voir Heckman *et alii* (1999).

(19) Une conclusion similaire est tirée de l'étude de l'œuvre de Bentham. (Voir Baujard (2006).

Bibliographie

Baigent N. et Gaertner W. (1996). "Never Choose the Uniquely Largest: A Characterization." *Economic Theory*, vol. 8, n° 2, pp. 239-49.

Baujard A. (2006). "From Moral Welfarism to Technical Non-Welfarism. A Step Back to Bentham's Felicific Calculus." *Crem WP 2006-06*, "Public Economics and Social Choice" series.

Boiteux M. (2001). *Transports : Choix des investissements et coût des nuisances*. Commissariat général du plan.

Cohen G. A. (1990). "Equality of What ? On Welfare, Goods and Capabilities." *Recherches Économiques de Louvain*, vol. 56, n° 3-4, pp. 357-382.

de Vroey M. (1990). "A Special Issue in Honor of Professor A. Sen. Alternatives to Welfarism." *Recherches Économiques de Louvain*, vol. 56, n° 3-4.

Frey B. S. et Stutzer A. (2001). *Happiness and Economics : How the Economy and Institutions Affect Human Well-Being*. Princeton University Press.

Frey B. S. et Stutzer A. (1999). "Measuring Preferences by Subjective Well-Being." *Journal of Institutional and Theoretical Economics*, vol. 155, n° 4, pp. 755-778.

Gaertner W. et Xu Y. (1999a). "On the Structure of Choice under Different External References." *Economic Theory*, vol. 14, pp. 609-620.

Gaertner W. et Xu Y. (1999b). "Rationality and External Preference." *Rationality and Society*, vol. 11, n° 2, pp. 169-185.

Haslett D. (1990). "What is Utility?" *Economics and Philosophy*, vol. 6, pp. 65-94.

Heckman J., LaLonde R. et Smith J. (1999). "The Economics and Econometrics of Active Labor Market Programs." In *Handbook of Labor Economics*, O. Ashenfelter et D. Card, Eds., vol. 3A. Elsevier Science, Amsterdam, ch. 31, pp. 1865-2097.

Hirshleifer J. (1976). *Price Theory and Applications*. Englewoods Cliffs, NJ : Prentice-Hall.

Kahneman D., Wakker P. P. et Sarin R. (1997). "Back to Bentham? Explorations of Experienced Utility." *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 112, n° 2, pp. 375-405.

Kapteyn A. (1994). "The Measurement of Household Cost Functions: Revealed Preference Versus Subjective Measures." *Journal of Population Economics*, vol. 7, n° 4, pp. 333-350.

Mongin P. et d'Aspremont C. (1998). "Utility Theory and Ethics." In *Handbook of Utility Theory*, S. Barbera, P. Hammond et C. Seidl, Eds., vol. 1. Kluwer, Dordrecht, ch. 10, pp. 371-481.

Nurmi H. (1999). *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*. Springer.

Pattanaik P., Salles M. et Suzumura K. (2004). "Special Issue on "Non Welfaristic Issues in Normative Economics". *Social Choice and Welfare*, vol. 22, n° 1.

Pattanaik P. K. (1994). "Some Non-Welfaristic Issues in Welfare Economics." In *Welfare Economics*, B. Dutta, Ed. Oxford University Press, pp. 197-248.

Pearce D. W., Ed. (1986). *The MIT Dictionary of Modern Economics*, 3ème éd. The MIT Press, Cambridge : MA.

Saari D. (1994). *Geometry of Voting*. Studies in Economic Theory. Springer-Verlag, Heidelberg.

Saari D. G. (2001a). *Chaotic Elections! A Mathematician looks at Voting.* AMS.

Saari D. G. (2001b). *Decisions and Elections. Explaining the Unexpected.* Cambridge University Press.

Saari D. G. et Sieberg, K. K. (2001). "The Sum of the Parts Violates the Whole." *American Political Science Review*, vol. 95, n° 2, pp. 415-433.

Sen A. K. (1970a). *Collective Choice and Social Welfare.* Holden-Day, Inc., San Francisco.

Sen A. K. (1970b). "The Impossibility of a Paretian Liberal." *Journal of Political Economy*, vol. 78, n° 1, pp. 152-157.

Sen A. K. (1979a). "Equality of What?" In *The Tanner Lectures on Human Values*, S. McMurrin, Ed., vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge. Rééd. in A. K. Sen, *Choice, Welfare and Measurement*, MIT Press, Cambridge, pp. 365-366, 1982.

Sen A. K. (1979b). "Personal Utilities and Public Judgements : Or What's Wrong with Welfare Economics?" *The Economic Journal*, vol. 89, n° 355, pp. 537-558.

Sen A. K. (1980-81). "Plural Utilities." *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. 81, pp. 193-215.

Sen A. K. (1985). "Well-Being, Agency and Freedom: The Dewey Lectures 1984." *The Journal of Philosophy*, vol. 72, n° 4, pp. 169-221.

Sen A. K. (1991). "Welfare, Preference and Freedom" *Journal of Econometrics*, vol. 50, n° 3, pp. 15-29.

Sen A. K. (1993). "Internal Consistency of Choice" *Econometrica*, vol. 61, n° 3, pp. 495-521.

Sugden R. (1993). "Welfare, Resources and Capabilities: A Review of 'Inequality Reexamined' by Amartya Sen." *Journal of Economic Literature*, vol. 31, pp. 1947-1962.

Annexes

Deux démonstrations sont possibles pour aboutir aux résultats contenus dans les propositions 1 et 2. La démonstration par calcul analytique constitue la méthode la plus standard dans la littérature sur les paradoxes de vote. La démonstration par calcul géométrique, développée par D. Saari et reprise ici dans le contexte de notre étude, permet de représenter les différentes conditions sur un schéma.

Démonstration par calcul analytique des propositions 1 et 2

Pour simplifier la présentation de la démonstration, on considérera les notations suivantes : $(v(C \succ B, T \succ S), v(C \succ B, S \succ T), v(B \succ C, T \succ S), v(B \succ C, S \succ T)) = (x, y, z, u)$. Ainsi, y désigne la proportion des individus dans la société qui préfèrent simultanément les voitures au bus et le métro aux taxis.

Selon les observations, nous avons :

$$\begin{cases} m_1 = x + y \\ m_2 = x + z \\ 1 = x + y + z + u \end{cases}$$

Nous obtenons un système de trois équations à quatre inconnues, ce que nous écrivons ci-dessous de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + m_2 + m_1 + t \\ 1 - m_2 - t \\ -m_1 + 1 - t \\ t \end{pmatrix}$$

Mais ces résultats ne sont valables que pour les conditions suivantes : $x, y, z, u \in [0; 1]$.

Montrons maintenant comment calculer $Prob[x \geq \alpha]$. Pour $x, y, z, u \in [0; 1]$, nous avons en particulier $t \in [0; 1]$ et :

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow t \in [0; 1 - m_2]$$

$$0 \leq z \leq 1 \Rightarrow t \in [0; 1 - m_1]$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } m_2 < m_1, t \in [0, 1 - m_1], \max\{0, -1 + m_1 + m_2\} \leq x \leq m_2 \\ \text{si } m_1 < m_2, t \in [0, 1 - m_2], \max\{0, -1 + m_1 + m_2\} \leq x \leq m_1 \end{cases}$$

Pour $x \geq \alpha$, les restrictions sur x sont les suivantes :

$$\text{si } m_1 \leq 1 - m_2 \text{ et si } m_2 \leq m_1, \text{ alors } 0 \leq x \leq m_2$$

$$\text{si } m_1 \leq 1 - m_2 \text{ et si } m_2 \geq m_1, \text{ alors } 0 \leq x \leq m_1$$

$$\text{si } m_1 \geq 1 - m_2 \text{ et si } m_2 \leq m_1, \text{ alors } m_1 + m_2 - 1 \leq x \leq m_2$$

$$\text{si } m_1 \geq 1 - m_2 \text{ et si } m_2 \geq m_1, \text{ alors } m_1 + m_2 - 1 \leq x \leq m_1$$

Pour $\alpha \leq x \leq 1, y, z, u \in [0, 1]$ nous avons en particulier $t \in [0, 1]$ et :

Si $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow t \in [0, 1 - m_2]$

Si $0 \leq z \leq 1 \Rightarrow t \in [0, 1 - m_1]$

Si $\alpha \leq x \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq -1 + m_1 + m_2$

$$\begin{aligned} & \text{si } m_2 \leq m_1, \max(0, \alpha + 1 - (m_1 + m_2)) \leq t \leq \min(1 - m_1, 2 - m_1 - m_2) \\ & \Rightarrow \text{si } m_1 \leq m_2, \max(0, \alpha + 1 - (m_1 + m_2)) \leq t \leq \min(1 - m_2, 2 - m_1 - m_2) \end{aligned}$$

Avec $\min(1 - m_i, 2 - m_1 - m_2) = 1 - m_i$ pour $i = 1, 2$ puisque $m_i \leq 1$.

Pour $x \geq \alpha$, on peut maintenant résumer les restrictions sur x :

si $m_1 - \alpha \leq 1 - m_2$ et si $m_2 \leq m_1$, alors $\alpha \leq x \leq m_2$

si $m_1 - \alpha \leq 1 - m_2$ et si $m_2 \leq m_1$, alors $\alpha \leq x \leq m_1$

si $m_1 - \alpha > 1 - m_2$ et si $m_2 \leq m_1$, alors $m_1 + m_2 - 1 \leq x \leq m_2$

si $m_1 - \alpha > m_2$ et si $m_2 \geq m_1$, alors $m_1 + m_2 - 1 \leq x \leq m_1$

Nous connaissons maintenant les valeurs limites de x qui sont cohérentes avec les observations des comportements des individus. Comme toutes les inconnues sont résumées dans une seule dimension, la fin de la preuve est évidente.

Montrons maintenant comment calculer $\text{Prob}[u \geq \beta]$.

$$\text{Pour } 0 \leq u \leq 1 \Rightarrow \begin{aligned} & \text{si } m_2 < m_1, t \in [0, 1 - m_1] \\ & \text{si } m_1 < m_2, t \in [0, 1 - m_2] \end{aligned}$$

Pour $\beta \leq u \leq 1$, on a :

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow t \in [\beta; 1 - m_2]$$

$$0 \leq z \leq 1 \Rightarrow t \in [\beta; 1 - m_1]$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$$

$$\text{Pour } m_1 > m_2, \max(0, \beta - 1 + m_1 + m_2) \leq x \leq m_2$$

$$- \text{ si } m_1 < 1, \beta - m_2, 1 - m_1 - m_2 \leq t \leq 1 - m_1$$

$$- \text{ si } m_1 > 1 - \beta - m_2, \beta \leq t \leq 1 - m_1$$

$$\text{Pour } m_1 > m_2, \max(0, \beta - 1 + m_1 + m_2) \leq x \leq m_1$$

$$- \text{ si } m_1 < 1 - \beta - m_2, 1 - m_1 - m_2 \leq t \leq 1 - m_2$$

$$- \text{ si } m_1 > 1 - \beta - m_2, \beta \leq t \leq 1 - m_2$$

La fin de la preuve est évidente.

Démonstration par calcul géométrique des propositions 1 et 2

Le profil des préférences observées peut être représenté sur un graphique. Par exemple, on peut exprimer sur la figure 1 le fait qu'une fraction m_1 de la population choisit de prendre sa voiture C quand elle peut choisir de prendre le bus B par la position d'un point d'observation. Plus ce point est proche de C et loin de B sur un segment, plus la part des personnes qui préfèrent C à B est importante.

Figure 1: représentation du profil pour un choix entre deux options

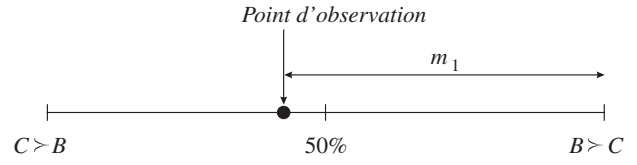
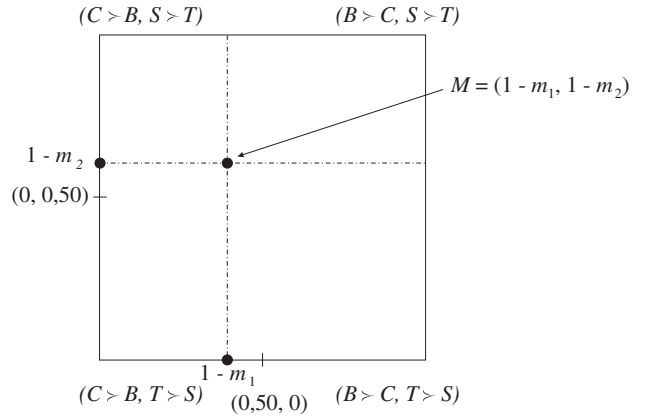


Figure 2 : représentation du profil pour deux choix de deux options chacun



On observe également le choix entre deux autres options, T et S . Nous pouvons représenter les deux choix simultanément dans un carré, présenté sur la figure 2, en plaçant le premier choix en abscisse et le second en ordonnée. Les données d'observations nous permettent de situer un point dans le carré.

Le côté gauche du carré comprend tous les individus qui préfèrent C à B , quelle que soit l'autre option dans le deuxième contexte. Parmi eux, certaines personnes préfèrent T à S . Ils sont $v(C > B, T > S)$. On peut réaliser le même raisonnement pour le côté droit du carré. Un point sur le côté gauche nous donne donc $v(C > B, T > S)$ et $v(C > B, S > T)$. Un point sur le côté droit nous donne $v(B > C, T > S)$ et $v(B > C, S > T)$. Ainsi, une droite dans le carré et un point d'observation permettent de représenter un profil spécifique ($v(C > B, T > S)$, $v(C > B, S > T)$, $v(B > C, T > S)$, $v(B > C, S > T)$). Inversement, tous les profils cohérents avec les observations. Pour cela, nous pouvons donc tracer une droite représentant un profil, qui sera d'équation :

$$\forall t \in [0, 1], t \left(0, \frac{v(C, S)}{v(C, T) + v(C, S)} \right) + (1 - t) \left(\frac{v(B, S)}{v(B, T) + v(B, S)} \right)$$

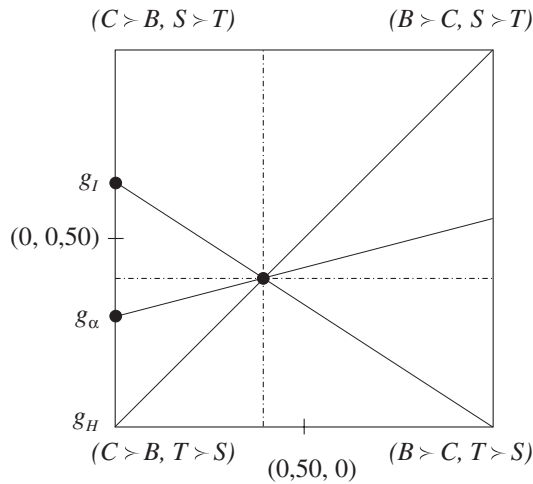
Tous les profils possibles de la société, et qui sont cohérents avec les observations des choix des individus, sont représentés par des droites dans le carré qui croisent le point d'observation M . Cherchons l'ensemble des droites, dans l'ensemble des profils possibles, qui représentent des profils cohérents avec les observations. Pour cela, nous étudions, dans un premier temps, les équations des droites qui délimitent la zone des profils possibles.

On recherche la zone des profils cohérents avec l'observation M . La position des droites-frontières dépend de la région du carré où se trouve le point d'observation M . Nous représentons une solution possible à partir de la figure 3. Les droites-frontières sont les suivantes. L'une joint $(1,1)$ à M et l'autre joint $(1,0)$ à M . Leur équation est : $(1-m_1, 1-m_2) = (1-t)(1,1) + t(0, g_H)$. On obtient donc $g_H = \frac{1-m_2}{m_2}$ et $(1-m_1, 1-m_2) = (1-t)(1,0) + t(0, g_I)$, donc $g_I = \frac{m_1-m_2}{m_1}$.

Posons α la proportion des personnes qui préfèrent C à B et T à S . On a donc : $\alpha = m_1 \times m_2$. Nous voulons représenter la droite de profil extrême pour laquelle au moins une fraction α des gens préfèrent C et T : $\alpha \leq m_1 \times m_2$. Cette droite va croiser le côté gauche à l'ordonnée g_α , qui représente la fraction minimum des personnes qui préfèrent S à T parmi ceux qui préfèrent C à B . On a donc $\alpha \leq m_1 \times (1-g_\alpha) \Leftrightarrow g_\alpha \leq 1 - \alpha / m_1$.

Les profils pour lesquels toutes les personnes préfèrent les

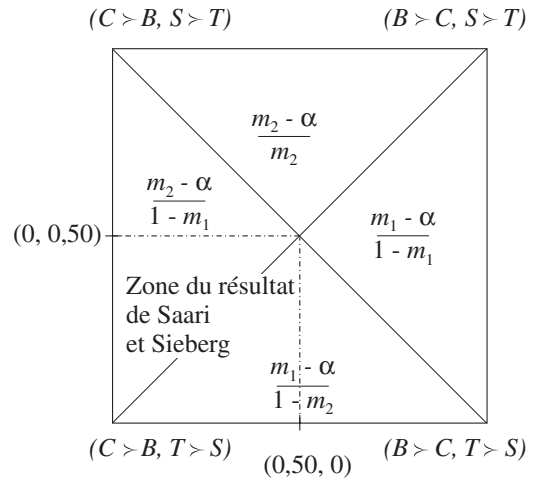
Figure 3 : profils cohérents avec les observations



deux options sont représentés par l'ensemble des droites de profils comprises entre la droite qui croise le côté gauche en g_H et la droite qui croise le côté gauche en g_I . Si nous posons l'hypothèse selon laquelle les profils sont équiprobables, alors la proportion des profils possibles qui préfèrent les options du point d'observation est donnée par la fraction $\frac{g^\alpha - g^I}{g^H - g^I}$, qui désigne la proportion de tous les profils cohérents avec l'observation. Ainsi, la probabilité que plus qu'une fraction α de la population apprécie les deux options, si les profils sont équiprobables, est de : $Prob[v(C > B, T > S) \geq \alpha] = \frac{m_2 - \alpha}{1 - m_1}$. On peut trouver des

résultats semblables pour les autres régions du carré, délimitées par les conditions suivantes : $m_1 > m_2$ et $m_1 < 1 - m_2$. Remarquons que toute restriction fondée sur la comparaison de m_i à un demi n'a pas d'utilité formelle, il s'agit seulement d'une condition adaptée au contexte du vote.

Figure 4 : selon la région, $Prob[v(C > B, T > S)]$



Ainsi, le résultat de D. Saari et K. Sieberg permet d'étudier les cas où le point d'observation se situe dans le carré sud-ouest, compris dans le grand carré. Notre étude permet d'établir, en particulier, que les droites des 1/2 ne sont pas des frontières déterminées par les contraintes de l'exercice. Nous avons montré que leur résultat était plus large que les restrictions précisées dans l'énoncé du théorème 1, puisqu'il est valable pour toute la partie en-deçà de la diagonale sud-est à nord-ouest. Nous avons, en outre, étendu la présentation du résultat à l'ensemble du carré.